

## CASI PATA CONTROL RECUPERATIVO.

EN ESTA CASI PATA, DELIBERADAMENTE SE OMITEN ALGUNOS DETALLES POR SU MENOR DIFICULTAD.

P1)  $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B$  BIYECTIVA.

(i) FÁCIL, BASTA APLICAR PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

(ii)  $[A]_{\mathcal{R}} = \{ B \in \mathcal{P}(E) : A \mathcal{R} B \}$   
 $= \{ B \subseteq E : \exists f: A \rightarrow B \text{ BIYECTIÓN} \}$   
 $= \{ B \subseteq E : |B| = |A| \}$  (POR DEFINICIÓN DE IGUALDAD DE CARDINAL)

Ahora, como  $A$  es infinito y subconjunto de  $E$  que es numerable  $\Rightarrow A$  es numerable y luego:

$$\forall B \subseteq E, |B| = |A| \Leftrightarrow B \text{ es numerable.}$$

Por lo que:

$$[A]_{\mathcal{R}} = \{ B \subseteq E : B \text{ es numerable} \}.$$

=.

¿OS ELEMENTOS DISTINTOS DE  $[A]_{\mathcal{R}}$ ?

¿OS OPCIONES:

1.  $A$  y  $E$  (son distintos)

2.  $A$  y  $\underbrace{A \setminus \{a\}}_{\text{es infinito}}$ , con algún  $a \in A$

Y POR ENDE NUMERABLE.

P2)

(i) FÁCIL. NO DEBERÍAN TENER PROBLEMAS.

(ii) VAMOS:

$$S = 1 + \frac{1^3 + 2^3}{2^2} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{3^2} + \dots + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^2}$$

Wemos:

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{i=1}^k i^3 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \left( \frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \right)
 \end{aligned}$$

(b) Sean  $a, b \in A$  cancelables en  $A$ .

P.D)  $a * b$  es cancelable en  $A$ .

$\Rightarrow \forall c, d \in A$  tales que

$$(1) \quad (a * b) * c = (a * b) * d \Rightarrow c = d$$

$$(2) \quad c * (a * b) = d * (a * b) \Rightarrow c = d.$$

(Hay que hacer lo para ambos lados,  $*$  no es necesariamente conmutativa).

Hacemos sólo (1):

$$(a * b) * c = (a * b) * d$$

$$\Rightarrow a * (b * c) = a * (b * d) \quad / \text{Asoc.}$$

$$\Rightarrow b * c = b * d \quad / a \text{ cancelable.}$$

$$\Rightarrow \underline{c = d} \quad / b \text{ cancelable.}$$

Esó es!

Go9 speed!